

SchiC-Wahlpflichtfach Mathematik

Laut Rahmenlehrplan "stellt der Wahlpflichtunterricht ein Angebot dar, das über den Regelunterricht hinausgeht und ihn thematisch erweitert. Er dient der Vertiefung von Fachinhalten und schafft die Möglichkeit, Fachliches und Überfachliches zu verbinden. Grundlage für den Unterricht im Wahlpflichtfach sind die fachlichen Kompetenzbereiche."

Auszug Fachbrief Nr. 19:

Themen des Wahlpflichtunterrichts sollen fachlich bedeutsame Themen bzw. Sachgebiete sein, die sonst im Schulunterricht nicht oder nur am Rande berücksichtigt werden. Es können auch aktuelle wissenschaftliche oder gesellschaftliche Entwicklungen oder Projekte der Schule zum Anlass genommen werden, darauf im Unterricht aus fachlicher Sicht besonders einzugehen. Die Auseinandersetzung mit den Themen soll den Schülerinnen und Schülern in besonderem Maße Gelegenheit geben, prozessbezogene mathematische Kompetenzen weiterzuentwickeln.

Bei der Auswahl und Ausrichtung von Wahlthemen sollte die Interessenlage der Schülerinnen und Schüler besonders berücksichtigt werden.

Weitere Themen auf entsprechendem Niveau sind möglich. Vorgriffe auf Pflichtthemen, auch der gymnasialen Oberstufe, oder Dopplungen sind nicht zulässig.

Folgende inhaltliche Ausrichtungen können unterschieden werden:

- Entwicklung und Anwendung von mathematischen Konzepten in technisch-wissenschaftlichen, ökonomischen oder gesellschaftlichen Kontexten,
- Begründung, Erweiterung oder Verallgemeinerung von mathematischen Strukturen und Modellen.

Die Zuordnung zu einer Jahrgangsstufe muss entsprechend der inhaltlichen Ausrichtung des jeweiligen Themas erfolgen.

1. Geometrische Beziehungen und Symmetrien entdecken und nutzen

Die Betrachtung und Untersuchung von Gestaltungen aus dem Alltag, von Gebäuden, Grafiken, Schriften oder Logos, kann Anlass sein, Symmetrien und weitere geometrische Beziehungen zu entdecken und zu nutzen. Die Schülerinnen und Schüler vertiefen beim Spiegeln, Drehen, Verschieben und Strecken ihre Kenntnisse über die Eigenschaften ebener Figuren.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Messen und Zeichnen von Winkeln und Strecken, Konstruieren geometrischer Figuren
- Beschreiben und Begründen von Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte
- Herstellen symmetrischer Figuren – auch durch Ausschneiden, Falten, Drehen, Abzählen von Gitterpunkten
- Erarbeiten und Anwenden von Konstruktionsvorschriften für Spiegelungen, Drehungen, Verschiebungen und Streckungen
- Untersuchen von Parkettierungen

2. Kryptologie

Kryptologie ist eine wissenschaftliche Disziplin im Grenzbereich von Mathematik und Informatik, der in der Informationsgesellschaft eine sehr große Bedeutung zukommt. Digitale Daten müssen vor Einsichtnahme und Manipulation geschützt oder durch digitale Signaturen authentifiziert werden. Die dafür verwendeten Verfahren nutzen mathematische Erkenntnisse und können mit mathematischen Methoden beurteilt werden.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Untersuchen der gesellschaftliche Relevanz der Thematik
- Prüfwerte
- Einwegcodierung und Hashfunktionen
- Anwenden von einfachen Chiffriermethoden der klassischen Kryptologie (Substitutions- und Transpositionsverfahren)
- Entschlüsseln verschlüsselter Texte ohne Kenntnis der Schlüssel, z. B. mit Hilfe von Häufigkeitstabellen oder Software
- Verfahren der modernen Kryptologie, Grundprinzip der asymmetrischen Verschlüsselung

3. Begründen und Beweisen in der Geometrie

Schülerinnen und Schüler erkunden Beziehungen geometrischer Figuren in Bezug auf Winkel, Streckenlängen und -verhältnisse, Kreise, Schnittpunkte, In- und Umkreise und Tangenten und formulieren Aussagen dazu. Neben den traditionellen Zeichenmaterialien wird dynamische Geometriesoftware eingesetzt. Schülerinnen und Schüler erkunden Invarianzen und finden Begründungen für die entdeckten Beziehungen.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Erkunden und Begründen von Umfangswinkelsatz, Mittelpunktswinkelsatz und Außenwinkelsatz
- Aussagen über die Umkehrbarkeit der Winkelsätze an geschnittenen Parallelen
- Konstruktion von Inkreis- und Umkreismittelpunkt eines Dreiecks und der Tangenten an einen Kreis
- Untersuchen der Mittelparallele und der Seitenhalbierenden eines Dreiecks („Schwerpunkt“)
- Ermitteln der Winkelsumme im n-Eck
- Eulersche Gerade, Satz von Napoleon

4. Zählen und Rechnen in historischer Entwicklung

Die Beschäftigung mit historischen oder (für Schülerinnen und Schüler) unüblichen Zahldarstellungen und Rechenverfahren führt zu einem vertieften Verständnis für die gebräuchlichen Rechenverfahren und die Systematik des Dezimalsystems.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Darstellen von Zahlen in verschiedenen Systemen
- Beschreiben von Verfahrensweisen bei der Zahldarstellung und der Durchführung von Rechnungen
- Beschreiben von Funktionsweisen der Rechenhilfsmittel
- Ausführen von Lösungsverfahren
- Einsetzen von Rechenhilfsmitteln
- Einsatz und Prinzip historischer Rechenhilfsmittel (Rechenbrett, Abakus, Proportionalzirkel, mechanische Rechenmaschinen nach dem Zählradprinzip, Rechenstab, Zahlentafeln)

5. Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

Neben dem Satz des Pythagoras können die Kathetensätze und der Höhensatz zur Lösung von inner- und au.ermathematischen Problemen genutzt werden. Historische Bezüge (Flächenverwandlungen) und Beweisvariationen rund um den Satz des Pythagoras können zu einer vertieften Einsicht der Flächensätze führen. Im Mittelpunkt des Themenfeldes stehen innermathematische Probleme, die Schülerinnen und Schüler mit den Flächensätzen lösen.

Mögliche Themen und Inhalte:

- algebraische und geometrische Beweise zur Satzgruppe des Pythagoras
- Flächenumwandlungen mit Hilfe des Höhen- oder des Kathetensatzes
- Anwenden der Kathetensätze, des Höhensatzes und des Satz des Pythagoras

6. Zahlentheorie

Wegen ihrer Anwendung in der modernen Kryptographie hat die Zahlentheorie außerordentlich an Bedeutung gewonnen. In der Schule kann die Beschäftigung mit zahlentheoretischen Fragestellungen zudem das Zahlverständnis und viele weitere Kenntnisse vertiefen. Häufig ist ein Bezug zu praktischen Anwendungen möglich.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Quadratzahlen
- Teilbarkeitsregeln
- Division mit Rest, Restklassen, Anwendungen davon, z.B. Prüfwziffern
- ggT und kgV, Euklidischer Algorithmus
- Primzahlen, Primfaktorenzerlegung, Primzahlentests
- Vollkommene Zahlen, Mersenne-Zahlen

7. Numerische Verfahren und Rechenhilfsmittel

Leistungsfähige, aber dennoch relativ einfach zu bedienende Rechenhilfsmittel stehen heutzutage nahezu ohne Einschränkungen zur Verfügung. Damit können auch in der Schule numerische Verfahren ohne großen technischen Aufwand oder Einarbeitung verwendet werden. Vorzugsweise sollten einfache Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner und Tabellenkalkulationssoftware) verwendet werden, damit numerische Verfahren nachvollziehbar bleiben.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Sinnvolles Runden und sinnvolles Rechnen mit gerundeten Werten
- Rechnen mit fehlerbehafteten Größen
- Anwenden von grafischen Darstellungen, z. B. zum Lösen von Gleichungen, z. B. $x = \cos x$
- Experimentelles Ermitteln von optimalen Werten, z. B. von Ausgleichsgeraden
- Rekursive Verfahren, z. B. Nullstellenbestimmung durch Intervallhalbierung
- numerische Flächenbestimmung (Trapezverfahren)
- Interpolation
- Algorithmische Verfahren zur Bestimmung von Wurzeln (Heron-Verfahren), Potenzen, trigonometrischen Werten etc.

8. Anwendungen der Trigonometrie

Seit Jahrtausenden werden trigonometrische Berechnungen bei Landvermessung, Navigation und in der Astronomie verwendet. Daraus ergeben sich vielfältige Anknüpfungspunkte und Beispiele für den Unterricht.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Historische Verfahren in der Landvermessung
- Triangulation
- Vorwärts-/Rückwärtseinschneid

9. Diskrete Strukturen, optimale Wege

Für diskrete Strukturen gibt es vielfältige Beispiele im Alltag: Liniennetzpläne der öffentlichen Verkehrsmittel, Straßenkarten, Freundschaftsdiagramme oder Telefonnetzwerke. Die Schülerinnen und Schüler erkennen solche Strukturen in ihrer Umwelt und modellieren diese mit Hilfe von Graphen. Zu realen Anwendungssituationen, z. B. der Planung eines Telefonnetzes oder einer Wegeoptimierung, können Algorithmen entwickelt und untersucht werden.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Modellieren mit Graphen, Interpretieren von Graphen als Realsituationen
- Verwenden von Matrizen zur symbolischen Darstellung von Graphen, Eigenschaften von Graphen
- Entwickeln, Diskutieren und Präsentieren von Modellierungsansätzen
- Formulieren und Formalisieren von Algorithmen
- Verwenden spezieller Graphen, z. B. Bäume
- Vorgehensweisen zum Auffinden optimaler Wege
- Finden und Anwenden von Graphenalgorithmen (z. B. Algorithmus von Kruskal)

10. Lineare Optimierung

Die Behandlung linearer Optimierungsprobleme eröffnet vielfältige Möglichkeiten. Die Probleme sind leicht verständlich und die Lösungsmethoden vielfältig. Der methodisch geschickte Einsatz von Computer-Algebra-Systemen kann die Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler erhöhen.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Umwandeln kontextbezogener Aufgabenstellungen in (Un-) Gleichungssysteme
- Zielfunktionen und Nebenbedingungen ermitteln
- graphisches Lösen von Gleichungs- und Ungleichungssystemen
- Lösungsmengen linearer Ungleichungen und linearer Ungleichungssysteme

11. Wachstumsprozesse

Schülerinnen und Schüler erkunden neben dem linearen und exponentiellen Wachstum auch beschränktes und logistisches Wachstum. Sie beschreiben es durch rekursive Darstellungen und modellieren in vielfältigen Kontexten Wachstums- und Schrumpfungsprozesse. Der Einsatz von Tabellenkalkulation wird zur Darstellung von Iterationsprozessen empfohlen.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Beschreiben, Interpretieren und Darstellen von funktionalen Zusammenhängen bei

Wachstums- und Schrumpfungsprozessen

- Anwenden von rekursiven Darstellungen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Sachzusammenhängen
- Modellieren von Realsituationen mit Wachstumsmodellen

12. Körper und Figuren darstellen und berechnen

Der handelnde Umgang mit ebenen und räumlichen Figuren vertieft das Raumvorstellungsvermögen. Bei geometrischen Konstruktionen üben die Schülerinnen und Schüler das maßgenaue Zeichnen. Das praktische Arbeiten vertieft das Verständnis für die Strukturen geometrischer Darstellungen wie Perspektiven und Projektionen. Dadurch erlangen die Lernenden ein größeres Verständnis für Maßgenauigkeiten und für technische Zeichnungen wie z. B. Bauanleitungen. Bei der Planung zum Bau von Körpermodellen vertiefen die Schülerinnen und Schüler ihre Vorstellungen über den Aufbau der Körper und über räumliche Lagebeziehungen.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Ausführen geometrische Grundkonstruktionen
- Ermitteln von Flächeninhalten durch Zerlegungen und Ergänzung
- Herstellen von Kantenmodellen und Körpern, auch mit Hilfe von Abwicklungen
- Konstruieren und Vergleichen räumlicher Darstellungen
- Nutzen von gebräuchlichen technischen Darstellungen

13. Kugeln und Kreise

Durch die Beschäftigung mit Volumen und Oberfläche der Kugel vertiefen die Schülerinnen und Schüler ihre Vorstellung von Näherungsverfahren. Es können zahlreiche Sachbezüge zur Kugel, zu Kugelteilen und zu mit Kugeln zusammengesetzten Körpern hergestellt werden, so dass Sachprobleme auf unterschiedlichen Niveaustufen bearbeitet werden können.

Mögliche Themen im Unterricht:

- Kreise, Segmente, Abschnitte und Tangenten
- Berechnen des Flächeninhalts von Kreisen, Kreisausschnitten und -abschnitten
- Experimentelles Ermitteln von Näherungen für das Kugelvolumen
- Anwenden von Näherungsverfahren zur Ermittlung von Kugelvolumen und Kugeloberfläche
- Herleiten der Formeln für Kugelvolumen und Kugeloberfläche durch Vergleich bzw. Zerlegung
- Berechnungen in Sachzusammenhängen, auch für Kugelausschnitt und Kugelabschnitt.

14. Platonische Körper und weitere regelmäßige konvexe Polyeder

Platonische Körper nehmen als spezielle Polyeder eine besondere Rolle ein. Schülerinnen und Schüler vertiefen ihr Raumvorstellungsvermögen durch den Bau und die Darstellung unterschiedlicher Platonischer Körper. Mit Hilfe von Systematisierungen und ihren Kenntnissen über Symmetrien erschließen sich die Schülerinnen und Schüler die besonderen Eigenschaften dieser Körper. Durch die Betrachtung und Untersuchung weiterer konvexer Polyeder (archimedische Körper, catalanische Körper, Johnson-Körper) kann das Themengebiet erweitert werden.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Eigenschaften von regelmäßigen Polyedern, besonderen Eigenschaften der Platonischen Körper
- Symmetrien, Dualität
- Abwicklungen, Schrägbilder, Schlegeldiagramme
- kulturhistorische Bezüge der regulären Polyeder
- Erzeugung Archimedischer Körper aus Platonischen Körpern
- Eulerscher Polyedersatz

15. Beweistechniken und Vollständige Induktion

Argumentieren, Begründen und Beweisen betreffen zentrale Kompetenzbereiche des Mathematikunterrichts, eine Vertiefung des für die Mathematik spezifischen formal-deduktiven Schließens ist jedoch in allen mathematischen Themengebieten möglich. Klassische Beweise können nachvollzogen und untersucht werden, es gibt jedoch auch vielfältige Beweisaufgaben, z. B. aus Mathematik-Wettbewerben. Mit der vollständigen Induktion lernen die Schüler ein weiteres Beweisverfahren kennen.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Abgrenzung zwischen Begründen und Beweisen
- klassische Beweistechniken (direkter Beweis, Widerspruchsbeweis, Kontraposition)
- Beweise in der Geometrie
- Vollständige Induktion (Folgen, Summen, Ungleichungen, Teilbarkeit)

16. Mathematische Logik

Die mathematische Logik hat neben ihren grundlegenden mathematischen Aspekten eine konkrete praktische Bedeutung in der Informatik. Diese beiden Gesichtspunkte bieten die Möglichkeit für eine spannende und abwechslungsreiche Gestaltung des Unterrichts.

Mögliche Themen und Inhalte:

- Aussagen und Nicht-Aussagen
- logische Operation und Verknüpfungen
- deMorgan-Regeln
- Quantoren, Prädikatenlogik
- Logische Schaltglieder (Gatter) und Schaltnetze
- Karnaugh-Veitch-Diagramme

Folgende weitere Themen/ Projekte sind unter Beachtung der anfangs genannten Voraussetzungen denkbar:

- **Buchprojekte:** Der Zahlenteufel: Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben (H.M. Enzensberger), Christian und die Zahlenkünstler: Ein Mathekrimi (A. Beutelspacher), Wie man durch eine Postkarte steigt... und andere mathematische Experimente (A. Beutelspacher) u.a.
- Vorbereitung, Training und Teilnahme an einem **Mathematikwettbewerb** (z.B: Känguru der Mathematik oder LogoFix [schulintern])
- **Finanzmathematik** (Börse [DAX u.a.], Banken)
- **Spieltheorie** (Staatliches Glücksspiel, Casino)
- **Rubiks Cube**
- **eigene Ideen (auch fachübergreifende Projekte mit WAT/ Informatik möglich)**